Électronique – Chapitre 4

TP-cours : Électronique numérique

I. Numérisation d'un signal 1
II. Échantillonnage 1
II.1. Période et fréquence d'échantillonnage 1
II.2. Mise en évidence de l'effet stroboscopique 2
II.3. Spectre d'un signal sinusoïdal échantillonné 3
II.4. Spectre d'un signal périodique échantillonné 4
III. Quantification 5
IV. Filtrage numérique 5
IV.1. Schéma numérique d'un filtre passe-bas 5
IV.2. Filtrage d'un signal numérique 6

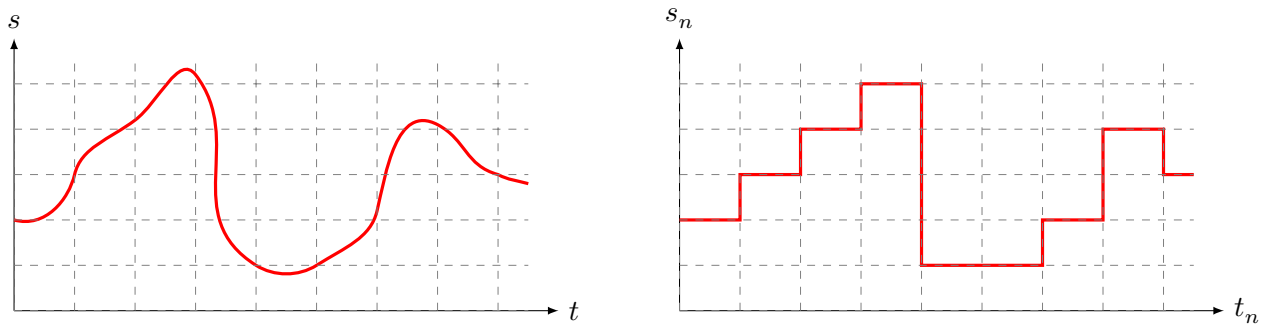
Matériel : GBF ML1643B, carte d'acquisition SYSAM, ordinateur avec Latis-Pro.

I. Numérisation d'un signal

On rappelle la différence entre un signal analogique et un signal numérique :

- un **signal analogique** varie de façon continue au cours du temps ;
- un **signal numérique** varie de façon discrète au cours du temps, et ne peut prendre qu'un ensemble discret de valeurs.

On représente ci-dessous un exemple de signal analogique $s(t)$ et le signal numérique $s_n(t_n)$ correspondant (le quadrillage correspond aux valeurs possibles pour le signal numérique).



La numérisation d'un signal analogique facilite sa transmission, son stockage et son traitement. Elle est réalisée par un **convertisseur analogique-numérique** (CAN) en deux étapes :

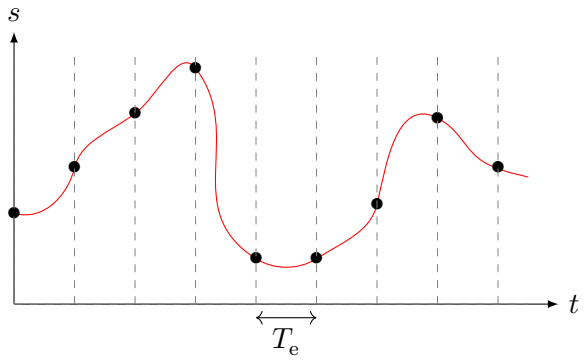
- un **échantillonnage** qui consiste à relever la valeur du signal à différents instants ;
- une **quantification** qui convertit chaque valeur relevée en une valeur discrète pour le signal numérique.

Après avoir réalisé le traitement ou la transmission du signal numérique, il est possible de le reconvertir en signal analogique à l'aide d'un **convertisseur numérique-analogique** (CNA), qui réalise à nouveau une quantification du signal.

II. Échantillonnage

II.1. Période et fréquence d'échantillonnage

Pour numériser un signal analogique $s(t)$, on relève sa valeur à chaque instant $t_n = n\,T_e$, avec n un nombre entier et T_e la **période d'échantillonnage**, c'est-à-dire l'intervalle de temps entre deux mesures.



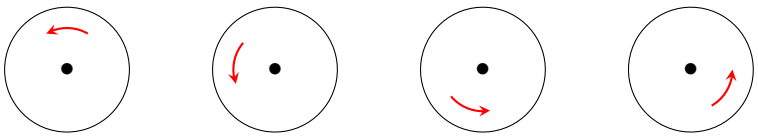
La **fréquence d'échantillonnage** est alors :

$$f_e = \frac{1}{T_e}.$$

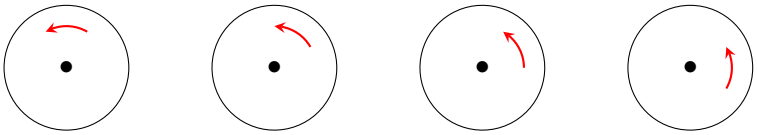
II.2. Mise en évidence de l'effet stroboscopique

On considère un disque tournant sur lui-même à la période T_0, sur lequel est représenté une flèche indiquant le sens de rotation. Il est éclairé périodiquement à l'aide d'un stroboscope émettant des flashs lumineux avec une période T_e.

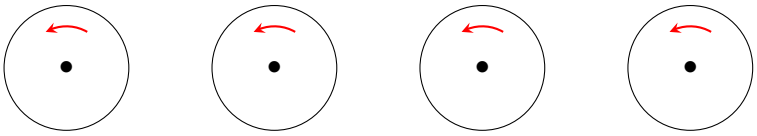
- Lorsque $T_e \ll T_0$, on observe la flèche tourner normalement.



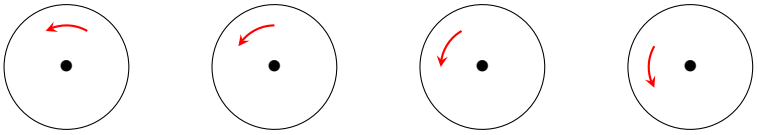
- Lorsque T_e est légèrement inférieure à T_0, on observe la flèche tourner lentement et en sens inverse de la rotation.



- Lorsque $T_e \approx T_0$, on observe que la flèche est immobile.



- Lorsque T_e est légèrement supérieure à T_0, on observe la flèche tourner lentement et dans le sens de la rotation.



Cette expérience illustre que le signal mesuré (perception de la rotation par notre œil) dépend de l'échantillonnage utilisé (fréquence du stroboscope).

Une fréquence d'échantillonnage très élevée permet d'éviter toute perte d'information lors d'un échantillonnage. Cependant, plus la fréquence d'échantillonnage est élevée et plus le nombre de points obtenu lors d'une acquisition est important, ce qui nécessite un espace de stockage important et complexifie sa transmission. On cherchera donc plutôt à utiliser la fréquence d'échantillonnage la plus petite possible qui permet néanmoins de conserver toute l'information sur le signal.

II.3. Spectre d'un signal sinusoïdal échantillonné

Nous souhaitons déterminer la fréquence d'échantillonnage minimale à utiliser pour conserver toute l'information sur un signal sinusoïdal. Pour cela, nous allons comparer le spectre du signal échantillonné avec celui du signal initial à l'aide du logiciel Latis-Pro.

- Générer à l'aide du GBF une tension sinusoïdale (bouton `FUNCTION`), d'amplitude 2 V (molette `AMPLITUDE`) et de fréquence $f_0 = 1\,\text{kHz}$ (molette `FREQ VAR`, en modifiant le calibre avec les boutons `RANGE-Hz` si besoin).
- Délivrer cette tension sinusoïdale entre l'entrée `EA1` et la masse de la carte d'acquisition reliée à l'ordinateur.
- Lancer le logiciel Latis-Pro et cliquer au centre de l'écran, puis paramétrer la carte dans la fenêtre `Paramètres` puis l'onglet `Acquisition` :
  - sélectionner la voie `EA1` ;
  - régler le calibre sur $\pm 5\,\text{V}$ (clic droit sur la voie `EA1`) ;
  - régler le nombre de points sur 2000 ;
  - régler la période d'échantillonnage `Te` sur 100 µs (ce qui correspond à une fréquence d'échantillonnage $f_e = 10\,\text{kHz}$) ;
  - cocher la case `Mode permanent` afin de réaliser des acquisitions en continu.
- Appuyer sur la touche F10 pour lancer l'acquisition, puis sur la touche Echap pour l'arrêter.
- Tracer ensuite le spectre du signal : menu `Traitements/Calculs Spécifiques/Analyse de Fourier`, puis glisser la courbe `EA1` depuis l'onglet `Liste des courbes`.
- Mesurer la fréquence du pic sur le spectre.

On retrouve la fréquence f_0 du signal sinusoïdal, l'échantillonnage a donc permis de conserver les caractéristiques du signal initial.

- Régler la fréquence du GBF sur $f_0 = 7\,\text{kHz}$, puis mesurer la fréquence du pic sur le spectre du signal échantillonné.

On mesure une fréquence différente de f_0 pour le signal échantillonné, l'échantillonnage ne permet donc plus de retrouver les caractéristiques du signal initial, on dit qu'il y a **repliement de spectre**.

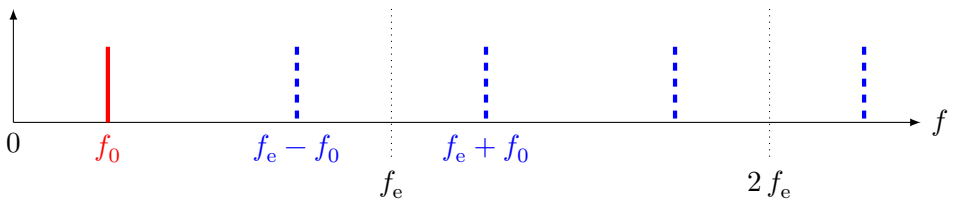
- Recommencer avec différentes fréquences f_0 comprises entre 1 kHz et 7 kHz, et observer qu'on ne retrouve la fréquence du signal initial que si $f_0 < 5\,\text{kHz}$.

Représentons le spectre d'un signal sinusoïdal de fréquence f_0 avant et après son échantillonnage.

Spectre du signal sinusoïdal

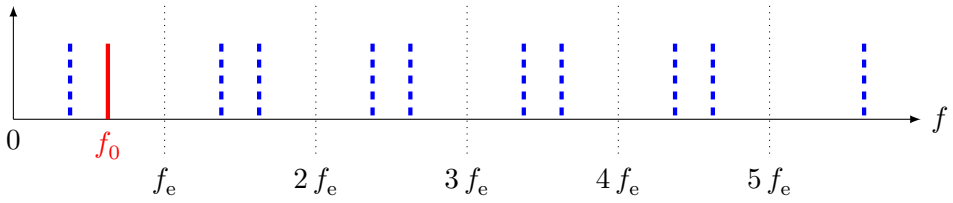


Spectre du signal échantillonné avec une fréquence $f_e > 2\,f_0$



Le spectre présente de nombreuses répliques du pic de fréquence f_0, et notamment un repliement (comme l'effet d'un miroir) autour de la fréquence $\dfrac{f_e}{2}$. Comme le pic de plus basse fréquence est celui à la fréquence f_0, il est possible de remonter à la fréquence du signal initial avec cet échantillonnage.

Spectre du signal échantillonné avec une fréquence $f_e < 2\,f_0$



Le pic de plus basse fréquence n'est plus f_0 mais $f_e - f_0$, on remonte alors à une fréquence qui n'est plus la fréquence du signal initial.

Pour éviter le phénomène de repliement de spectre, l'échantillonnage d'un signal sinusoïdal de fréquence f_0 doit donc être réalisé avec une fréquence d'échantillonnage f_e qui vérifie le **condition de Nyquist-Shannon** :

$$f_e \geqslant 2\,f_0.$$

II.4. Spectre d'un signal périodique échantillonné

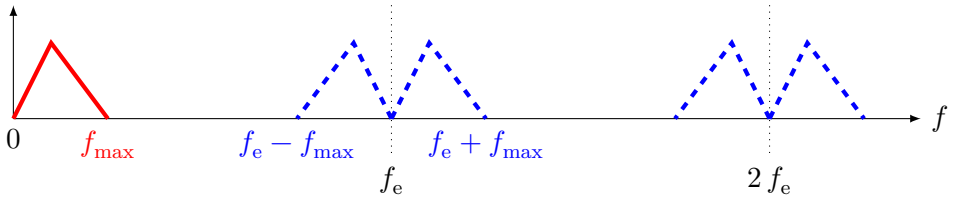
On considère maintenant un signal périodique quelconque, contenant de nombreuses fréquences, et dont la fréquence maximale est f_{max}.

Représentons le spectre de ce signal périodique avant et après son échantillonnage.

Spectre du signal périodique

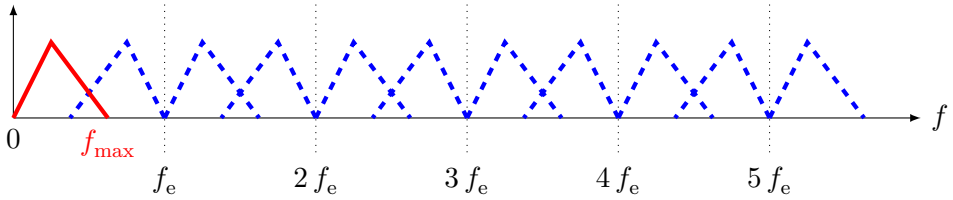


Spectre du signal échantillonné avec une fréquence $f_e > 2\,f_{max}$



Les différentes répliques ne se superposent pas, il est possible de remonter au spectre du signal initial avec cet échantillonnage.

Spectre du signal échantillonné avec une fréquence $f_e < 2\,f_{max}$



Les différentes répliques se superposent, il y a repliement de spectre, et il n'est pas possible de remonter au spectre du signal initial avec cet échantillonnage.

Pour éviter le phénomène de repliement de spectre, l'échantillonnage d'un signal périodique de fréquence maximale f_{max} doit donc être réalisé avec une fréquence d'échantillonnage f_e qui vérifie le **condition de Nyquist-Shannon** :

$$\boxed{f_e \geqslant 2\,f_{max}}.$$

En pratique, le spectre d'un signal réel n'a pas forcément de fréquence maximale. Prenons l'exemple d'un créneau, il présente une infinité d'harmoniques impaires, mais dont l'amplitude décroit comme $1/n$ avec n le numéro de l'harmonique. Il faut alors identifier la fréquence maximale au-delà de laquelle les harmoniques ne sont plus significatives.

- Délivrer à l'aide d'un GBF une tension créneau de fréquence $f_0 = 100\,\text{Hz}$ et d'amplitude $2\,\text{V}$, puis tracer son spectre sur Latis-Pro avec une fréquence d'échantillonnage $f_\text{e} = 10\,\text{kHz}$.
- Observer que l'amplitude des harmoniques du signal devient négligeable au-delà de $2\,\text{kHz}$ environ.

III. Quantification

Contrairement à un système analogique qui peut traiter n'importe quelle valeur, un système numérique (ordinateur, oscilloscope...) ne peut traiter qu'un ensemble discret de valeurs.

On peut montrer que le nombre de valeurs possibles N pour un système à n bits est :

$$N = 2^n.$$

On note ΔU l'amplitude maximale d'acquisition d'un signal, celle-ci correspond souvent au calibre du système de mesure.

Le **pas de quantification** q, qui correspond à l'écart entre deux valeurs successives que peut prendre le système, s'exprime alors :

$$q = \frac{\Delta U}{N-1} = \frac{\Delta U}{2^n - 1} \approx \frac{\Delta U}{2^n}$$

puisqu'il y a $N-1$ intervalles pour l'amplitude ΔU.

Application :

> Sachant que la carte d'acquisition de Latis-Pro possède un convertisseur à 12 bits, déterminer le pas de quantification pour le calibre $\pm 10\,\text{V}$.
> Pour le calibre $\pm 10\,\text{V}$, l'amplitude maximale est : $\Delta U = 20\,\text{V}$, d'où : $q = \dfrac{\Delta U}{2^n} = 5.10^{-3}\,\text{V}$.

- Délivrer à l'aide d'un GBF une tension triangulaire de fréquence $5\,\text{Hz}$ et d'amplitude $1\,\text{V}$.
- Réaliser une acquisition du signal sur Latis-Pro en réglant le calibre sur $\pm 10\,\text{V}$, le nombre de points sur 20000, et la période d'échantillonnage sur $100\,\mu\text{s}$.
- Zoomer sur la courbe pour observer le pas de quantification, et retrouver la valeur calculée précédemment.

IV. Filtrage numérique

Il est possible d'appliquer de nombreux traitements à un signal numérisé. À titre d'exemple, nous allons réaliser un filtrage numérique passe-bas.

IV.1. Schéma numérique d'un filtre passe-bas

On considère un filtre passe-bas du premier ordre dont la fonction de transfert s'exprime :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_\text{s}}{\underline{u}_\text{e}} = \frac{1}{1 + \text{j}\,\frac{\omega}{\omega_\text{c}}}$$

avec $\omega_\text{c} = 1{,}0.10^4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ la pulsation de coupure, soit une fréquence de coupure $f_\text{c} = \dfrac{\omega_\text{c}}{2\,\pi} = 1{,}6\,\text{kHz}$.

Dans le domaine fréquentiel, on déduit de la fonction de transfert que :

$$\underline{u}_\mathrm{s} + \frac{\mathrm{j}\,\omega\,\underline{u}_\mathrm{s}}{\omega_\mathrm{c}} = \underline{u}_\mathrm{e}$$

d'où l'équation différentielle dans le domaine temporel :

$$u_\mathrm{s}(t) + \frac{1}{\omega_\mathrm{c}}\,\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} = u_\mathrm{e}(t).$$

Afin de déterminer l'évolution temporelle de la tension $u_\mathrm{s}(t)$, on réalise une discrétisation du temps avec un pas temporel T_e. Les deux tensions seront alors approximées par des listes $u_\mathrm{e}[i]$ et $u_\mathrm{s}[i]$ telles que :

$$\begin{cases} u_\mathrm{e}[i] = u_\mathrm{e}(t_i = i \times T_\mathrm{e}) \\ \\ u_\mathrm{s}[i] = u_\mathrm{s}(t_i = i \times T_\mathrm{e}) \end{cases}$$

et la dérivée première sera exprimée à l'aide de la méthode d'Euler :

$$\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} = \frac{u_\mathrm{s}[i+1] - u_\mathrm{s}[i]}{T_\mathrm{e}}.$$

L'équation différentielle se ramène finalement au schéma numérique suivant :

$$u_\mathrm{s}[i] + \frac{u_\mathrm{s}[i+1] - u_\mathrm{s}[i]}{\omega_\mathrm{c}\,T_\mathrm{e}} = u_\mathrm{e}[i]$$

d'où la relation de récurrence :

$$u_\mathrm{s}[i+1] = A\,u_\mathrm{e}[i] + B\,u_\mathrm{s}[i]$$

avec $A = \omega_\mathrm{c}\,T_\mathrm{e}$ et $B = 1 - \omega_\mathrm{c}\,T_\mathrm{e}$.

IV.2. Filtrage d'un signal numérique

- Délivrer à l'aide du GBF une tension sinusoïdale d'amplitude 1 V et de fréquence $f = 200$ Hz.
- Acquérir le signal sur la voie `EA1` de la carte d'acquisition, avec 2000 points et une période d'échantillonnage de 10 µs (la condition de Nyquist-Shannon est respectée).
- Recopier l'algorithme passe-bas suivant dans le menu `Traitement/Feuille de calcul` :
  - définition de la période d'échantillonnage : `Te=1e-5`
  - définition de la pulsation de coupure : `omegac=1e4`
  - calcul de la constante A : `A=omegac*Te`
  - calcul de la constante B : `B=1-omegac*Te`
  - création d'une liste, initialement vide, pour la tension en sortie : `us=Table(0)`
  - application de la relation de récurrence : `us[n]=A*EA1[n-1]+B*us[n-1]`

  puis l'exécuter en appuyant sur la touche F2.
- Superposer au signal de la voie `EA1` le signal filtré `us` en le glissant sur le graphique depuis l'onglet `Liste des courbes`, puis comparer leur amplitude.

Comme $f \ll f_\mathrm{c}$, le signal est peu affecté par le filtre passe-bas.

- Recommencer le filtrage pour différentes fréquences f comprises entre 200 Hz et 20 kHz afin de retrouver le comportement passe-bas du filtre.

Lorsque $f > f_\mathrm{c}$, l'amplitude du signal après filtrage est atténuée.